Keimlinge in ausgesprochenem Widerspruch zur landläufigen Frosthärte der Muttersorte.

Kreuzungsnachkommenschaften verhielten sich im Prinzip stets wie die Nachkommen der gleichen Muttersorte bei freier Abblüte. Selbst wenn sehr unterschiedlich veranlagte Bestäubersorten eingekreuzt wurden, waren Resistenzänderungen in Richtung der väterlichen Eigenschaft nicht erkennbar.

Birnenkeimlinge waren im Ganzen gesehen empfindlicher als Apfelkeimlinge.

2. Im Zusammenhang mit den Keimlingsversuchen wurde weiterhin gefunden

Die Sorte Cox hatte einen für diploide Sorten ungewöhnlich hohen Prozentsatz tauber Kerne. Auch bei Benutzung von Cox als Bestäubersorte wurden in Kreuzungsfrüchten verhältnismäßig wenig gute Kerne gefunden.

Der Keimungstermin der Samen wurde von der Muttersorte stärker beeinflußt als von der Vatersorte.

Das bei Kontrollversuchen durchgeführte Abschneiden der Keimwurzeln wurde sowohl von Apfel- wie von Birnenkeimlingen ohne nennenswerte Störung überwunden. In der Art der Neuwurzelbildung zeigten Äpfel und Birnen charakteristische Unterschiede.

3. Für einjährige Sämlinge

Die Zahl überlebender Sämlinge stieg bei sonst gleichen Voraussetzungen mit zunehmender Wurzelhalsstärke.

Die Einschaltung einer Vorkühlung (18 Std. —3° C) wirkte resistenzfördernd.

Schadensprüfungen auf Grund von Wurzelhalsanschnitten gaben keine zuverlässigen Resultate.

Im Durchschnitt der Tafelsorten war die Frosthärte von Apfel- und Birnensämlingen gleich groß, im Durchschnitt der Mostsorten waren Birnensämlinge härter.

Die Prüfung der Sortennachkommenschaften im Einjahrstadium brachte im allgemeinen andere Ergebnisse als die Prüfung im Keimstadium. Bei Cox und W. Wintertaffet lagen aber gesicherte Übereinstimmungen vor.

Die Frosthärte von Sämlingen, die bereits im Keimstadium einer Frostselektion ausgesetzt worden waren, war im allgemeinen nicht größer als bei Sämlingen ohne vorherige Keimlingsfrostung. Nur bei besonders strenger Auslese im Keimstadium war eine zwar geringe, aber immerhin gesicherte Überlegenheit gegenüber den Kontrollen erkennbar.

Die Beziehungen zwischen der Frosthärte des Keimlings und des einjährigen Sämlings können trotz der meist negativen Befunde noch nicht als völlig geklärt betrachtet werden. Da nach unseren Feststellungen die Frosthärte der Keimlinge weitgehend durch störende Außenfaktoren beeinflußt wird, die in unseren bisherigen Versuchen wahrscheinlich weder restlos erfaßt noch ausgeschaltet werden konnten, bleibt die Möglichkeit offen, daß zwischen der Frosthärte beider Altersstadien Zusammenhänge bestehen, die sich eines Tages praktisch nutzen lassen.

Literatur

1. KARNATZ, H.: Untersuchungen über die Frostresistenz der Obstgehölze im Baumschulstadium. Teil III. Der Züchter **26**, H. 10, 307—315 (1956). — 2. KEMMER, E.: Zur Suche nach frostfesten Obstgehölzen. Ceres, 1949, H. 4/5, 22. — 3. KEMMER, E. u. F. SCHULZ: Das Frostproblem im Obstbau. München 1955. — 4. KEMMER, E. u. F. SCHULZ: Die Bedeutung des Kernobstsämlings als Unterlage. Landw. Jahrbuch **83**, H. 3, 297 bis 319 (1936). — 5. KEMMER, E. u. I. THIELE: Frostresistenzprüfungen an keimenden Kernobstsamen. Der Züchter **25**, H. 1/2, 57—60 (1955). — 6. MÜLLER, G.: Untersuchungen über die Kältefestigkeit von Pflaumensorten. Zeitschrift für Pflanzenzüchtung **23**, H. 1, 91—144 (1939). — 7. SCHANDER, H.: Keimungsphysiologische Studien an Kernobst, Teil V. Zeitschrift für Pflanzenzüchtung **35**, H. 3, 345—361 (1956). — 8. SCHMIDT, M.: Beiträge zur Züchtung frostwiderstandsfähiger Obstsorten. Der Züchter **14**, H. 1, 1—19 (1942). — 9. SCHWECHTEN, A.: Untersuchungen über die Kältefestigkeit von Obstunterlagen. Die Gartenbauwissenschaft **9**, H. 6, 575—616 (1935). — 10. SORAUER, P.: Experimentelle Studien über die mechanischen Wirkungen des Frostes bei Obst- und Waldbäumen. Landw. Jb. **35**, 469—526 (1906). — 11. THIELE, I.: Jungfernfrüchtigkeit bei Kernobst als züchterische Aufgabe. Der Züchter **26**, H. 7/8, 241—243 (1956). — 12. WILHELM, A. F.: Experimentelle Untersuchungen über die Kälteresistenz von Reben und Obstgehölzen. Die Gartenbauwissenschaft **8**, H. 1, 77—114 (1933). — 13. WINKLER, A.: Über den Einfluß der Außenbedingungen auf die Kälteresistenz ausdauernder Gewächse. Jb. f. wissenschaftl. Botanik **52**, H. 4, 467—506 (1913). — 14. ZWINTZSCHER, M.: Experimentelle Untersuchungen zur Züchtung von Obstgehölzen mit frostwiderstandsfähigen Fruchtknospen und Blüten. Zeitschrift für Pflanzenzüchtung **26**, H. 3/4, 245—352 (1944).

(Aus dem Botanischen Institut der Universität Freiburg, Direktor: Professor Dr. F. OEHLKERS, und der Staatlichen Anstalt für experimentelle Therapie, „Paul-Ehrlich-Institut", Direktor: Professor Dr. Dr. h. c. R. PRIGGE)

Varianzanalyse und Konfidenzbehauptungen

Von **PETER IHM**

Mit 5 Textabbildungen

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat W. U. BEHRENS (1956) die Frage aufgeworfen, ob die Varianzanalyse, die simultanen Tests oder der einfache STUDENTsche t-Test die bei der landwirtschaftlichen Sortenanalyse auftretenden Fragen beantwortet. Da die Antwort von großer praktischer Bedeutung ist, lohnt sich der Versuch, das Problem von einer anderen Seite zu beleuchten, als dies BEHRENS getan hat. In einer anderen Arbeit (IHM 1955) habe ich zeigen können, daß in bestimmten Fällen ein simultaner Test verwendet werden muß, bzw. simultane Konfidenzbehauptungen aufgestellt werden müssen. Hier möchte ich verschiedene in der Praxis auftretende Fälle behandeln und Kriterien für die Verwendung der einzelnen Methoden angeben. Dazu verwende ich den Begriff des Kofidenzschlusses, den ich im folgenden Abschnitt kurz erläutere, um dann zu den einzelnen Problemstellungen selbst überzugehen.

2. Sei das n-tupel von unabhängigen Meßwerten $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ normalverteilt und das n-tupel von Erwartungswerten $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ gegeben, und sei H_0 die Hypothese $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$ (Nullhypothese). Die Gegen-

hypothese H_1 besage $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$. Außerdem sei $\mathfrak{m}$ für den ganzen n-dimensionalen Raum definiert. Es gibt in diesem Falle ein Entscheidungsverfahren, das es uns erlaubt, H_0 zu verwerfen, wobei wir dann von *signifikanten Unterschieden* sprechen. Wir gründen auf dieses Entscheidungsverfahren die Behauptung über Signifikanz und Nichtsignifikanz, wobei aber die Nichtsignifikanz im Falle der üblichen einstufigen Verfahren ohne Kenntnis der Varianz nicht näher spezifiziert werden kann. Es ist ja einleuchtend, daß Nichtsignifikanz nicht die Nichtgültigkeit von H_1, d. h. die Alleingültigkeit von H_0, sein kann. Bei Nichtsignifikanz ist es aber unmöglich, in einem einstufigen Verfahren ohne Kenntnis eines zusätzlichen Parameters eine verbindliche Aussage über den Erwartungswert $\mathsf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{m}$ zu machen (STEIN 1945). Hier drängt sich die Verwendung des Konfidenzschlusses auf. Wir nehmen die Gesamtheit aller $\mathfrak{m}$, für die die Bedingung erfüllt ist, daß wir sie bei einem Versuchsergebnis $\mathfrak{x}$ unter der Nullhypothese akzeptiert hätten. Erfüllen z. B. $\mathfrak{m}$ aus einem Bereich $\mathfrak{K}$ diese Bedingung, so stellen wir die Behauptung $\mathrm{E}\,\mathfrak{x} \in \mathfrak{K}$ auf ($\in$ gelesen „enthalten in"). War das erwähnte Entscheidungsverfahren über die Nullhypothese derart, daß wir bei Gültigkeit von H_0 diese Hypothese mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - \gamma$ verwerfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von $\mathrm{E}\,\mathfrak{x} \in \mathfrak{K}$ gleich γ; γ heißt Konfidenzkoeffizient, $\mathfrak{K}$ Konfidenzbereich[1]. Daraus geht hervor, daß die Frage, ob die Abweichung von H_0 signifikant ist, nichts als die Frage darstellt, ob $\mathfrak{m}_0 \in \mathfrak{K}$. Der Konfidenzschluß bringt also nichts prinzipiell Neues, sondern stellt lediglich eine Erweiterung dessen dar, was in der Praxis bereits getan wird. Daher kann ich mich hier auf diesen beschränken. Weitere Erläuterung des Konfidenzschlusses finden sich an anderer Stelle (z. B. IHM 1954a, 1954b, 1955).

3. Wir betrachten zunächst einen einfachen Fall. Es wurden zwei unabhängige arithmetische Mittel, x_1 und x_2, festgestellt. Sie haben eine gemeinsame Normalverteilung mit unbekannten Erwartungswerten m_1 und m_2. Für die unbekannte Varianz, die in beiden Fällen gleich sei, steht ein Schätzwert s^2 für ν Freiheitsgrade zur Verfügung. Wir schreiben $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathfrak{m} = (m_1, m_2)$. Die Nullhypothese lautet dahingehend, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$ ist, d. h. $m_1 = m_{10}$, $m_2 = m_{20}$. Um zu einem Entscheidungsverfahren zu kommen, braucht man einen Bereich $\mathfrak{B}$ in der $\mathfrak{x}$-Ebene, der so beschaffen ist, daß die Wahrscheinlichkeit für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$ dem Werte γ entspricht, wenn H_0 zutrifft; $\mathfrak{B}$ hängt noch von s^2 ab. $\mathfrak{B}$ heißt mitunter *Annahmebereich für* H_0. Diese Wahrscheinlichkeit errechnet sich nach der zweidimensionalen t-Verteilung. Ein bekannter Fall ist der, daß $\mathfrak{B}$ das Innere eines Kreises ist mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}_0$ und dem Radius R, der von s^2 und FISHERS F für zwei Freiheitsgrade im Zähler und ν im Nenner abhängt. Liegt $\mathfrak{x}$ nicht in diesem Bereich, so sprechen wir von signifikanten Unterschieden gegenüber $\mathfrak{m}_0$. Der entsprechende Konfidenzbereich $\mathfrak{K}$ ist in der $\mathfrak{m}$-Ebene das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ und dem gleichen Radius. Die Frage, ob $\mathfrak{m}_0$ in diesem Kreis liegt, läßt sich anschaulich lösen, jedoch auch rein rechnerisch durch die Beantwortung der Frage, ob die Entfernung des Punktes $\mathfrak{m}_0$ von $\mathfrak{x}$ kleiner ist als R oder nicht. Ihr Quadrat beträgt $(x_1 - m_{10})^2 + (x_2 - m_{20})^2$, und wir sehen sofort den Zusammenhang mit der Varianzanalyse.

Es ist aber auch denkbar, statt des Kreises ein Quadrat zu verwenden. Es wird so konstruiert, daß bei Zutreffen von H_0 die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der beiden Ungleichungen

$$|x_1 - m_{10}| < A$$
$$|x_2 - m_{20}| < A$$

gleich γ ist. A hängt wieder von s^2 ab. Liegt $\mathfrak{x}$ im Innern des Quadrates mit Seitenlänge $2A$ und Mittelpunkt $\mathfrak{m}_0$, so akzeptieren wir H_0. Der entsprechende Konfidenzbereich stellt in der $\mathfrak{m}$-Ebene das Innere eines Quadrates mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ und der Seitenlänge $2A$ dar. Wir formulieren dann zwei Aussagen über die Erwartungswerte $m_1 = \mathsf{E}\,x_1$ und $m_2 = \mathsf{E}\,x_2$, nämlich

$$|m_1 - x_1| < A$$

und

$$|m_2 - x_2| < A.$$

Denken wir uns jetzt, H_0 träfe zu. Dann wird mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - \gamma$

$$|x_1 - m_{10}| < A \quad \text{und} \quad |x_2 - m_{20}| < A$$

nicht zutreffen, d. h. stattdessen

I $\quad |x_1 - m_{10}| \geq A$ und $|x_2 - m_{20}| < A$

oder

II $\quad |x_1 - m_{10}| < A$ und $|x_2 - m_{20}| \geq A$

oder

III $\quad |x_1 - m_{10}| \geq A$ und $|x_2 - m_{20}| \geq A$

sein. In Abb. 1 sind die Bereiche, für die die Ungleichungen I bis III zutreffen, durch diese römischen

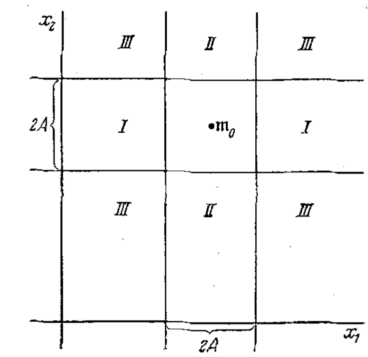

Abb. 1. Quadratischer „Annahmebereich" für die Hypothese $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$.

Ziffern bezeichnet. Im Falle I ist die Behauptung $|m_1 - x_1| < A$ falsch, die andere richtig, im Falle II umgekehrt; im Falle III sind beide Behauptungen falsch. Wenn wir hier von einem Fehler hinsichtlich einer Behauptung über die m_i $(i = 1{,}2)$ sprechen, so haben wir doch bei der Festsetzung von A unter einem Fehler verstanden, daß die Verbindung zweier Behauptungen, die durch *„und"* (besser *„sowohl als auch"*) erfolgt war, nicht richtig ist. Wir haben verlangt, daß die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von

$$|m_1 - x_1| < A \quad \text{und} \quad |m_2 - x_2| < A$$

gleich γ ist. Dann ist die Behauptung falsch, wenn I oder II oder III zutrifft. In einem solchen Fall spricht man von einer *Konjunktion* von Behauptungen. Haben wir z. B. eine Sorte, die dann als gut zu bezeichnen ist,

[1] Als deutsche Übersetzung des englischen „Confidence Region" ist Mutungsbereich üblich (vgl. PRIGGE 1954). Da ich jedoch in der vorausgegangenen Arbeit (IHM 1955) immer von Konfidenzbereichen gesprochen habe, behalte ich dieses Wort in dieser Arbeit bei.

wenn sie hinsichtlich zweier Merkmale gewissen Anforderungen genügt, so müssen die Behauptungen über beide Merkmale richtig sein, um das Prädikat „*gut*" geben zu können. Hier liegt eine solche Konjunktion von Behauptungen vor. Es ist üblich geworden, bei einer Konjunktion von Konfidenzbehauptungen von *simultanen Konfidenzbehauptungen* und von *simultanen Konfidenzintervallen* bzw. *Konfidenzbereichen* zu sprechen.

Es ist aber keinesfalls gesagt, daß derartige Behauptungskonjunktionen immer verlangt sind. Seien z.B. zwei verschiedene Sorten gegeben. Die Forderung lautet, daß die Behauptungen über Sortenleistungen mit der Wahrscheinlichkeit γ richtig sein sollen. Bei 100 Paaren von Behauptungen sollen also $200\,\gamma$ richtig und $200(1-\gamma)$ falsche Behauptungen über eine Sorte im Durchschnitt auftreten. Indem wir die Wahrscheinlichkeit mit $p\,()$ bezeichnen, haben wir als Erwartungswert μ einer falschen Behauptung (für „*und*" jetzt & setzend)

$$\begin{aligned}\mu = \frac{1}{2}\{&p\,(|x_1 - m_{10}| \geq A \;\&\; |x_2 - m_{20}| < A)\\ &+ p\,(|x_1 - m_{10}| < A \;\&\; |x_2 - m_{20}| \geq A)\\ &+ 2\,p\,(|x_1 - m_{10}| \geq A \;\&\; |x_2 - m_{20}| \geq A)\}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mu = \frac{1}{2}\{p\,(|x_1 - m_{10}| \geq A) + p\,(|x_2 - m_{20}| \geq A)\}.$$

Da wir in unserem Beispiel beide Summanden als gleich vorausgesetzt haben, erhalten wir schließlich

$$\mu = p\,(|x_1 - m_{10}| \geq A).$$

Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der eindimensionalen STUDENTschen t-Verteilung, d. h. es ist $A = t\,s$. Wählen wir z. B. für t den zu $P = \alpha = 0.05$ gehörigen Tabellenwert, so ist dieser Erwartungswert μ gleich 0.05. Es folgt also das interessante Resultat, daß in diesem Beispiel Konfidenzbereiche unter Zugrundelegung des STUDENTschen t-Testes gewonnen werden können. Hier liegt das Gegenstück zu der Angabe simultaner Konfidenzintervalle vor. Es ist nicht uninteressant, einmal die Frage zu stellen, welchen Fall der Kreis, von dem im Anfang dieses Abschnittes die Rede war, darstellt. Dort liegt eine Behauptung über einen Punkt $\mathfrak{m}$ vor, und die Wahrscheinlichkeit für deren Richtigkeit beträgt γ. Der Fall steht also in einer gewissen Analogie zu dem der simultanen Intervalle.

4. Die vorangegangenen Beispiele geben nicht die übliche Situation bei den Sortenversuchen wieder. In diesem Abschnitt will ich daher die Beispiele etwas modifizieren. Es sollen jetzt arithmetische Mittel x_1, x_2, x_3 mit den Erwartungswerten m_1, m_2, m_3 vorliegen. Die x_i $(i = 1, 2, 3)$ seien unabhängig voneinander normalverteilt. Für die Varianz steht wieder ein Schätzwert s^2 für ν Freiheitsgrade zur Verfügung. H_0 sei hier die Hypothese, daß $m_1 = m_2 = m_3$ ist. Ein Test zur Prüfung dieser Hypothese ist also ein Homogenitätstest. Bekanntlich führt man durch eine orthogonale Transformation (d.h. durch Drehung der Koordinatenachsen) die neuen Variablen

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) = \bar{x}\sqrt{3}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 - x_2 + 2\,x_3)$$

ein. Die y_i $(i = 0, 1, 2)$ sind unabhängig voneinander, und y_1 und y_2 haben den Erwartungswert null. Wenn wir uns auf y_1 und y_2 beschränken, haben wir den ersten Fall von Abschnitt 3 mit $\mathfrak{m}_0 = (0,0)$. Da

$$y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3\,\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - \bar{x})^2$$

ist, ist der Zusammenhang mit der üblichen Varianzanalyse unmittelbar klar. Einen Konfidenzbereich für den Punkt $(\mathsf{E}\,y_1, \mathsf{E}\,y_2)$ erhalten wir analog.

Auch für den Fall eines Quadrates läßt sich ein Beispiel angeben. Es seien x_1 der Ertrag einer Kontrollsorte und x_2 und x_3 die Erträge von zwei zu prüfenden Sorten. Die Differenzen

$$z_1 = x_2 - x_1$$

$$z_2 = x_3 - x_1$$

sind zwar normalverteilt, jedoch nicht länger unabhängig. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte ist konstant auf der Peripherie einer Ellipse, deren Hauptachsen mit den Diagonalen des im letzten Abschnitte angegebenen Quadrates übereinstimmen, sowohl für die gemeinsame Normalverteilung als auch für die gemeinsame t-Verteilung. Die Resultate über den Erwartungswert einer falschen Behauptung, wie sie im letzten Beispiel des vorangegangenen Abschnittes erhalten wurden, gelten wegen der Symmetrie auch hier. Anders ist es freilich im zweiten Beispiel, in dem für A eine andere Zahl eingesetzt werden muß. Es ist möglich, A zu berechnen, da eine entsprechende Integraltafel vorliegt (DUNNETT und SOBEL 1954), doch will ich hier auf diesen Fall nicht näher eingehen. Ob man Konfidenzbehauptungen mittels STUDENTS t aufstellt oder für den Fall simultaner Behauptungen das Integral der zweidimensionalen t-Verteilung bei Vorliegen von Korrelation heranzieht, hängt wieder von dem Beispiel ab, mit dem man es zu tun hat. Will man z. B. eine Behauptung der Art „*Die erste Sorte weicht fast gar nicht, die zweite erheblich von der Kontrolle ab*" aufstellen, so verbirgt sich dahinter zweifelsohne eine Konjunktion aus zwei Behauptungen. Hier müssen simultane Konfidenzintervalle angegeben werden. Ein anderer Fall wäre der, daß man Paare von Sorten hat, die jedoch nicht näher zusammengehören, doch auf die gleiche Kontrolle unter Verwendung desselben s^2 bezogen werden. Hier lautet die Forderung nur, daß die Wahrscheinlichkeit einer falschen Behauptung pro Sorte α betragen soll. Trotz der vorhandenen Korrelation ist hier der gewöhnliche t-Test adäquat. Das Resultat gilt auch für beliebig viele Sorten, die auf die gleiche Kontrolle bezogen werden sollen, sofern die Sortenmittel mit gleicher Varianz verteilt sind, doch kann die Varianz bei der Kontrolle verschieden sein (andere Anzahl von Meßwerten), wenn nur der Faktor bekannt ist, um den sie sich unterscheidet. Im Falle einer Konjunktion von mehreren Behauptungen ist allerdings noch keine numerische Lösung gegeben, jedoch ist sie für sogenannte halbseitige simultane Konfidenzintervalle auf Grund vorhandener Tabellen durch einfache Produktintegration unschwer zu erhalten (IHM unveröffentlicht).

5. Die bisherigen Beispiele hatten sich auf Kreis und Quadrat beschränkt. Im Falle der sogenannten Differenzentabelle, die beim Sortenvergleich eine Rolle spielt, tritt ein reguläres Sechseck auf. Gehen wir näm-

lich von der y_1, y_2-Ebene aus, so können wir Koordinatenachsen für die Differenzen

$$d_{12} = x_1 - x_2, \; d_{13} = x_1 - x_3, \; d_{23} = x_2 - x_3$$

berechnen, die in Abb. 2 dargestellt sind. Die Erwartungswerte dieser Differenzen wollen wir mir δ_{12}, δ_{13} und δ_{23} bezeichnen. Die Nullhypothese sei $\delta_{12} = \delta_{120}$, $\delta_{13} = \delta_{130}$, $\delta_{23} = \delta_{230}$. Um ein Entscheidungsverfahren angeben zu können, benötigen wir die Wahrscheinlichkeit für die Gültigkeit der drei Ungleichungen

$$|d_{12} - \delta_{120}| < B$$
$$|d_{13} - \delta_{130}| < B$$
$$|d_{23} - \delta_{230}| < B\,.$$

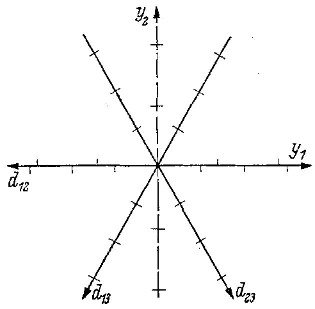

Abb. 2. Koordinatensystem mit d-Achsen.

Sie ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der durch die d_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, i < j)$ bestimmte Punkt $\mathfrak{y} = (y_1, y_2)$ im Innern eines Sechseckes liegt. Wir richten letzteres so ein, daß die Wahrscheinlichkeit gleich γ ist. Der Konfidenzbereich ist hier das Innere eines kongruenten Sechsecks in der $\mathfrak{y}$-Ebene mit einem durch die d_{ij} gegebenen Mittelpunkt. B hängt außer von s^2 noch von der sogenannten studentisierten Variationsbreite ab (vgl. IHM 1955). Ein einfaches Beispiel zeigt, daß auch in diesem Falle Behauptungskonjunktionen vorkommen. So ist die Behauptung „*Die beiden ersten Sorten differieren nicht voneinander, jedoch die letzte von den beiden ersten*" eine solche. Hier ist die Verwendung der simultanen Konfidenzintervalle unbedingt nötig. Soll aber keine Konjunktion aufgestellt werden, so kann der gewöhnliche t-Test verwendet werden. Es gibt hier drei Differenzen. Für Differenzentripel gilt, daß der Erwartungswert einer falschen Behauptung gleich α

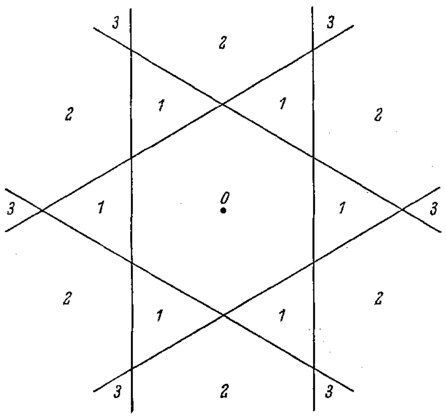

Abb. 3. Sechseckiger „Annahmebereich" und Bereiche, in denen 1, 2, 3 Fehler gemacht werden.

ist. Dies läßt sich durch einen ähnlichen Ansatz wie in Abschnitt 3 leicht zeigen, wenn man die Bereiche, in denen 1, 2, 3 Fehler gemacht werden, betrachtet. Sie sind in Abb. 3 angegeben und durch die entsprechenden Ziffern bezeichnet.

6. Mitunter wird die Abweichung von einem gemeinsamen Sortenmittel verwendet. Sei $m_1 + m_2 + m_3 = 3\,\overline{m}$. Dann werden Behauptungen der Form

$$|m_i - \overline{m} - x_i + \overline{x}| < C\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

aufgestellt. Für $n = 3$ lassen sich in der $\mathfrak{y}$-Ebene drei $(x_i - \overline{x})$-Achsen angeben (Abb. 4). Die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der drei Ungleichungen $|x_i - \overline{x} - m_i + \overline{m}| < C$ für $i = 1, 2, 3$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür daß $\mathfrak{y}$ im Innern eines regulären Sechseckes liegt; für $n = 4$ ist es ein reguläres Oktaeder. Auch hier gilt das bereits gesagte: wird eine Konjunktion von Aussagen aufgestellt, so muß C so angegeben werden, daß die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen von n Ungleichungen der obengenannten Form gleich γ ist. In anderen Fällen genügt der gewöhnliche t-Test.

7. Über die Beziehung des Sortenvergleichs in einer Differenzentabelle zur Varianzanalyse ist viel geschrieben worden. Die Verhältnisse lassen sich in der Ebene außerordentlich leicht veranschaulichen. Wir haben in Abschnitt 4 bereits gesehen, daß der Konfidenzbereich durch das Innere eines Kreises gegeben ist. Das entsprechende Sechseck ist, zusammen mit dem Kreis, in Abb. 5 gezeichnet. Wie wir sehen, treten Fälle auf, in denen ein Punkt zwar im Kreis, nicht aber im Sechseck liegt und umgekehrt. Dies sind die Fälle,

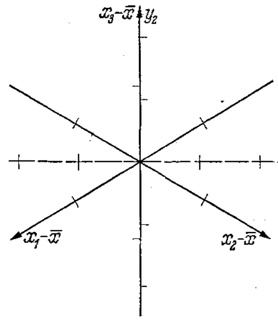

Abb. 4. Koordinatensystem mit $(x - \overline{x})$-Achsen.

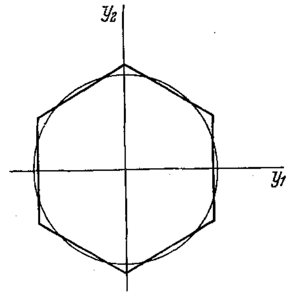

Abb. 5. Kreis und Sechseck, für die die Wahrscheinlichkeit, daß $\mathfrak{y}$ in ihrem Innern liegt, gleich ist.

in denen beide Verfahren abweichende Resultate geben. Sie sind also nicht äquivalent. Bei Verwendung des STUDENTschen t-Tests zur Konstruktion des Sechseckes (und die wiederholte Anwendung desselben beim Sortenvergleich liefert ja ein solches), wäre diese kleiner gewesen. Ein Vergleich des letzteren mit dem Kreis ist aber überhaupt nicht möglich. Beim Homogenitätstest der Varianzanalyse wird eine Behauptung über einen Punkt aufgestellt. Dem entspricht dem Sinne nach die Konjunktion aus den Behauptungen über die Koordinaten des Punktes, d. h. die simultanen Konfidenzintervalle. Die wiederholte Anwendung des STUDENTschen t-Testes mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α kann keinen Homogenitätstest mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α liefern. *Ein Verfahren, das darin besteht, nach Anwendung der Varianzanalyse mittels des STUDENTschen Tests nach den einzelnen Differenzen zu suchen, ist daher abzulehnen.*

8. Wenn nach dem bisher gesagten der Varianzanalyse keine besondere praktische Bedeutung zuzukommen scheint, wäre eine solche Annahme doch verfehlt. Die hier angegebenen Konfidenzintervalle definieren in der Ebene Polygone. Für andere lineare Funktionen werden ebenfalls Polygone benötigt, doch gibt es nicht für alle Fälle Tabellen. Seien η_1 und η_2 die Erwartungswerte von y_1 und y_2. Dann läßt sich für (η_1, η_2) ein Konfidenzbereich angeben, der das Innere eines Kreises darstellt. Fragen wir dann nach linearen Funktionen der m_i, die sich durch solche der η_i darstellen lassen, so folgen aus der Konfidenzbehauptung über (η_1, η_2) solche über die linearen Funktionen. Die Konfidenz-

intervalle sind dann die Projektionen des Kreises auf einzelne Achsen in der η-Ebene. Es handelt sich dabei um simultane Konfidenzintervalle, d. h. die Irrtumswahrscheinlichkeit wird für die Konjunktion der Behauptungen angegeben, doch ist sie stets $\leqq \alpha$. Damit kommt den Konfidenzintervallen, die mittels des Ansatzes der Varianzanalyse erhalten werden, der Charakter einer Abschätzung zu.

9. Nach den theoretischen Erörterungen, bei denen die Konstanten willkürlich durch Buchstaben ersetzt wurden, möchte ich jetzt deren Zahlenwerte genauer angeben, soweit diese bereits bekannt sind.

a) Es seien n Werte $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, die unabhängig sind und die Erwartungswerte $m_1, \ldots, m_n$ haben. Gemeinsamer Schätzwert der Varianz der x_i ist s^2 für ν Freiheitsgrade. Gefragt ist nach den $n\,(n-1)/2$ Differenzen $\delta_{ij} = m_i - m_j$ $(j > i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Wir bilden $d_{ij} = x_i - x_j$. Soll eine Konjunktion von Behauptungen über die δ_{ij} formuliert werden, so sind die simultanen Konfidenzbereiche durch

$$d_{ij} - a\,s < \delta_{ij} < d_{ij} + a\,s$$

mit $a = w_{n,\nu}$ gegeben. $w_{n,\nu}$ ist die studentisierte Variationsbreite bei n Werten für ν Freiheitsgrade und gegebenes $P = \alpha$ (Tabellen bei MAY 1952 und PEARSON und HARTLEY 1954.). Werden die Behauptungen nicht zu einer Konjunktion verbunden und soll, unabhängig von einer Zusammengehörigkeit der Behauptungen, die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit einer Behauptung gleich $\gamma = 1 - \alpha$ sein, so ist ein Konfidenzintervall durch

$$d_{ij} - a'\,s < \delta_{ij} < d_{ij} + a'\,s$$

gegeben mit $a' = t_\nu\sqrt{2}$, wobei t_ν das zu $P = \alpha$ gehörige t für ν Freiheitsgrade ist.

In der Praxis sind die x_i arithmetische Mittel aus je N Werten. s^2 ist dann der durch N dividierte Schätzwert der Varianz des Einzelwertes. Selbstverständlich hätte man auch letzteren verwenden können, so daß dann in den Formeln für a bzw. a'noch $\sqrt{N}$ aufgetreten wäre.

b) Sei unter den Voraussetzungen des Abschnittes 9a $\bar{x}$ das arithmetische Mittel der x_i, $\bar{m}$ das der m_i. Wir wollen diesmal eine Konjunktion von Behauptungen über die $(m_i - \bar{m})$ aufstellen. Da die Varianz von $x_i - \bar{x}$, worauf BEHRENS (1955) hingewiesen hat, $(n-1)/n$-mal die der Varianz von x_i ist, gilt

$$x_i - \bar{x} - b\,s < m_i - \bar{m} < x_i - \bar{x} + b\,s$$

mit $b = w_{3,\nu}/\sqrt{3}$ für $n = 3$. $w_{3,\nu}$ ist die studentisierte Variationsbreite. Für $n = 4$ habe ich b für $\nu \to \infty$ berechnen können. Es gilt $b = 2.00s$ für $P = 0.05$ und $b = 2.47s$ für $P = 0.01$. Die Tafeln von PEARSON und HARTLEY (1954) enthalten zwar die studentisierten Werte von b für größere n, doch handelt es sich dabei um die größte Abweichung $x_i - \bar{x}$ von $\bar{x}$, nicht um die größte Absolutabweichung $|x_i - \bar{x}|$ von $\bar{x}$, die hier benötigt wird.

Soll keine Behauptungskonjunktion aufgestellt werden, so gilt

$$x_i - \bar{x} - b'\,s < m_i - \bar{m} < x_i - \bar{x} + b'\,s$$

mit $b' = t_\nu\sqrt{\frac{n-1}{n}}$; t_ν ist STUDENTS t für ν Freiheitsgrade.

c) Wir haben diesmal $n + 1$ Werte $x_0, x_1, \ldots, x_n$. x_0 stammt von einer Kontrolle. Wir wollen eine Konjunktion von Behauptungen

$$x_i - x_0 - c\,s < m_i - m_0 < x_i - x_0 + c\,s$$

aufstellen. c ist noch nicht berechnet worden, kann aber für $n - 2$ aus den Tabellen von DUNNETT und SOBEL (1954) erhalten werden. Soll keine Konjunktion angegeben werden, d. h. soll die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit einer einzelnen Behauptung gleich γ sein, so gilt

$$x_i - x_0 - c'\,s < m_i - m_0 < x_i - x_0 + c'\,s$$

für alle Dimensionen mit $c' = t_\nu\sqrt{2}$. t_ν ist STUDENTS t für ν Freiheitsgrade.

Damit sind eine Reihe praktischer Fälle erfaßt, wenn auch in manchen noch die Tafeln fehlen. Bei ihrer Berechnung wird man zweckmäßigerweise den modernen Weg der Benutzung elektronischer Rechenautomaten gehen, doch fehlen mitunter dazu die Mittel; durch eine gemeinsame Planung der Interessenten kann hier etwas erreicht werden. Im Falle b wird man für $n = 3$ größere Stichproben verwenden, damit die Zahl der Freiheitsgrade doch wenigstens in die Gegend von 50 kommt, und dann die normale Approximation verwenden, d. h. die hier angegebenen Werte. Bei $n > 3$ dürfte FISHERS F zur Abschätzung passend sein. Im Falle c (simultane Konfidenzintervalle) ist die Verwendung von F nicht ökonomisch.

d) Für lineare Funktionen beliebiger Art der m_i erhalten wir mittels FISHERS F eine allgemeine Abschätzungsmethode. Wir bilden

$$l_i = k_{i1}\,x_1 + k_{i2}\,x_2 + \ldots + k_{in}\,x_n$$

und

$$\lambda_i = k_{i1}\,m_1 + k_{i2}\,m_2 + \ldots + k_{in}\,m_n\,.$$

Es soll eine Konjunktion von Behauptungen über die λ_i aufgestellt werden. Es sei

$$v_i^2 = k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2\,.$$

Dann gilt

$$l_i - d_i\,s < \lambda_i < l_i + d_i\,s$$

mit $d_i = v_i\sqrt{p\,F_{p,\nu}}$. Dabei ist $F_{p,\nu}$ FISHERS F für p und ν Freiheitsgrade. Die Zahl p läßt sich nicht allgemein angeben. Stets ist $p \leqq n$. Genau ist p die Zahl n der Dimensionen weniger der Zahl der (linear unabhängigen) linearen Gleichungen, die die λ_i erfüllen. So ist z. B. in den Beispielen 9a und 9b $p = n - 1$; es gilt ja $\delta_{12} - \delta_{13} - \delta_{23} = 0$ usw.

F liefert, wie gesagt, eine Abschätzung. Die simultanen Konfidenzintervalle sind die Projektionen einer p-dimensionalen Hyperkugel auf Koordinatenachsen, die durch die λ_i definiert sind. Diese Intervalle definieren ihrerseits aber ein p-dimensionales „Polyeder", dessen begrenzende Hyperflächen Tangentialhyperebenen der Hyperkugel sind. Eine günstigere Lösung würde durch die Ausnutzung der dabei unberücksichtigten Zwickel an den Ecken erhalten werden. Sei das entsprechende optimale d_i mit d_i^* bezeichnet, so gilt die Ungleichung

$$v_\nu\,t_\nu < d_i^* < v_i\sqrt{p\,F_{p,\nu}}\,, \quad p > 1\,.$$

10. Über simultane Konfidenzintervalle ist in letzter Zeit viel geschrieben worden. Bei der Festsetzung der Irrtumswahrscheinlichkeit haben sich die einzelnen Autoren im allgemeinen mit wenig klaren Ausdrucksweisen wie *Angabe eines "error experimentwise"* usw. ohne Nennung des Grundes begnügt. Meines Erachtens wird durch Verwendung des Konjunktionsbegriffes viel an Klarheit gewonnen. Einige der in dieser Arbeit erwähnten Beispiele zeigen, daß auch im landwirtschaftlichen Sortenversuch Fälle von Konjunktionen vorkommen. Im allgemeinen dürfte man sagen

können, daß die simultanen Konfidenzintervalle mehr den Problemen der Forschung vorbehalten sind, STUDENTS t mehr der Qualitätskontrolle, die die routinemäßigen Sortenversuche ja darstellen, doch lassen sich hier natürlich keine festen Grenzen setzen. Es ist unbedingt nötig, sich stets die Frage nach der Behauptungsverbindung vorzulegen.

Literatur

1. BEHRENS, W. U.: Der Durchschnitt der Prüfmittelwerte als Bezugsgröße. Z. Acker- und Pflanzenbau **99**, 397—402 (1955). — 2. BEHRENS, W. U.: Die Gültigkeit des t-Testes. Z. Pflanzenzüchtung **36**, 214—227 (1956). — 3. DUNNETT, W. und M. SOBEL: A bivariate generalization of STUDENT's t-distribution, with tables for certain special cases. Biometrika **41**, 153—169 (1954). — 4. IHM, P.: Ein Konfidenzbereich für den Erwartungswert eines Mittelwertepaares. Z. ind. Abst. u. Vererbungsl. **86**, 54—60 (1954). — 5. IHM, P.: Anwendung von HOTELLINGS verallgemeinertem T-Test zur Prüfung der Differenz zweier Mittelwertepaare. Z. ind. Abst. u. Vererbungsl. **86**, 143—156 (1954). — 6. IHM, P.: Eine exakte Methode als Ersatz für die Varianzanalyse in bestimmten Fällen. Züchter **25**, 365—368 (1955). — 7. MAY, J. M.: Extended and corrected tables of the upper percentage points of the 'Studentised' range. Biometrika **39**, 192—194 (1952). — 8. PEARSON, E. S. und H. O. HARTLEY: Biometrika Tables for Statisticians. Band I, Cambridge University Press, London, 1954. — 9. PRIGGE, R.: Die Anwendung der „Mutungsbereiche" in der Immunitätsforschung. Arb. a. d. Paul-Ehrlich-Inst. usw. **51**, 29—44 (1954). — 10. STEIN, CH.: A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance. Ann. Math. Statist. **16**, 243—258 (1945).

Untersuchungen zur Frage der Immunität des Kartoffel-„U.S.D.A. Seedling 41956" gegen das X-Virus

Von **ERICH KÖHLER** (Braunschweig)

Mit 1 Textabbildung

1. Einleitung

Der amerikanische „Sämling" U.S.D.A. 41956 (Klon) ist dafür bekannt, daß er sich unter natürlichen Infektionsbedingungen keine Infektionen mit dem Kartoffel-X-Virus zuzieht (SCHULTZ u. a., 1934). Man bezeichnet ihn deshalb als X-immun. Die Frage, ob sich das Virus nicht doch, wenn auch vielleicht nur kurzfristig und unter Beschränkung auf den Infektionsherd in ihm vermehren kann, ist umstritten. Wenn dies zuträfe, so würde keine eigentliche Immunität vorliegen, sondern ein extremer Grad von Abwehrresistenz; denn als immun gegen ein bestimmtes Virus können wir nur solche Formen bezeichnen, in denen dieses Virus nicht reproduktionsfähig ist. Zuletzt haben wohl HUTTON u. WARK (1952) aus ihren Infektionsversuchen an dem gleichfalls X-immunen Kreuzungsabkömmling „11/84" des genannten Sämlings gefolgert, daß keine absolute Immunität vorliegen könne. Sie rieben Blätter dieser Sorte mit X-Virus ein und verimpften den Preßsaft aus solchen Blättern am 2., 5., 7., 9., 12. usw. bis zum 28. Tage post infectionem auf *Gomphrena globosa* als Indikator. Sie erhielten dabei am 2. und 5. Tag p. i. durchschnittlich 3,8 bzw. 0,2 Einzelherde an den Blättern der Testpflanze, keine mehr jedoch am 7. Tage oder später. Dadurch soll die anfängliche Vermehrung des Virus bewiesen sein. Wenn später kein Virus mehr nachweisbar war, so sei dies auf eine inaktivierende Gegenwirkung des Wirtes zurückzuführen.

Daß sich das X-Virus durch den Sämling 41956 in basaler Richtung hindurchleiten läßt, wenn man ihn als Zwischenpfropfling zwischen anfälligen Sorten verwendet, ist bekannt (CLINCH 1942). Daraus geht hervor daß die in den Leitbahnen des Zwischenpfropflings anzunehmenden inaktivierenden Gegenkräfte — falls solche wirksam sind — nicht ausreichen würden, um das Virus im Laufe seiner passiven Verfrachtung im Zwischenpfropfling seiner Aktivität völlig zu berauben. CLINCH kommt auf Grund ihrer Pfropfversuche zu der Folgerung, daß sich das Virus in 41956 nicht vermehrt.

In den Berichten der Scottish Plant breeding Station (1952) wird mitgeteilt, daß an Blättern der Achselsprosse von als Pfropfunterlage dienenden immunen Sämlingen, denen X-infizierte Reiser aufgepfropft waren, kleine nekrotische Flecke auftraten. Zu einer systemischen nekrotischen Erkrankung kam es jedoch in keinem Fall, und auch die Knollen der Unterlage enthielten kein Virus. Das Erscheinen der nekrotischen Flecke läßt sich nach unserem Dafürhalten wohl am besten wie folgt deuten: Das X-Virus ist aus dem Reis in die Blätter (vermutlich noch in die Blattanlagen) der Achselsprosse der Unterlage vorgedrungen und hat dort lokale Überempfindlichkeitsreaktionen ausgelöst. Damit wäre aber nicht bewiesen, daß sich das Virus an diesen oder anderen Stellen der Unterlage selbst vermehrt hat, denn schon geringe Mengen des aus dem Reis herangeführten Virus könnten unter bestimmten Voraussetzungen zur Auslösung einer Empfindlichkeitsreaktion mit Fleckenbildung genügen. 41956 könnte also gegen X immun und außerdem noch überempfindlich sein.[1]

2. Eigene Untersuchungen

In einem Versuch (21. 6. 55) wurden 40 Blattfiedern mehrerer 41956-Pflanzen unter Verwendung von Karborundpuder mit dem X-Virus (Stamm H19) eingerieben und sofort unter der Wasserleitung abgespült. Sodann wurden sie in fünf Gruppen zu je 8 in feuchte Petrischalen gelegt. Die Schalen von Gruppe 1 (Nullzeit) kamen gleich anschließend in den Kühlraum (2° C), um die Virusvermehrung zu unterbinden. Die Schalen der übrigen Gruppen wurden zunächst in einem Raum mit Dauerlicht bei 22° aufgestellt, um dem Virus günstige Vermehrungsbedingungen zu bieten. Auch diese Gruppen kamen später in den Kühlraum und zwar Gruppe 2 nach 24 Std., Gruppe 3 nach zwei, Gruppe 4 nach vier und Gruppe 5 nach acht Tagen. Am 9. Tag p. i. wurden alle Proben $^1/_2$ Min. in 1 %iger Kalilauge umgeschwenkt und anschließend in Wasser abgespült, um alles äußerlich anhaftende Virus zu entfernen. Von den Fiedern jeder Gruppe wurden alsdann

[1] Da 41956 durchweg mit dem S-Virus behaftet zu sein scheint, könnten die nekrotischen Flecke auch unter dessen Einwirkung zustandegekommen sein.